Universidade de São Paulo

Instituto de Física de São Carlos

Programa de Pós-graduação

Exame de Ingresso

Física Computacional

Segundo Semestre de 2024

GABARITO

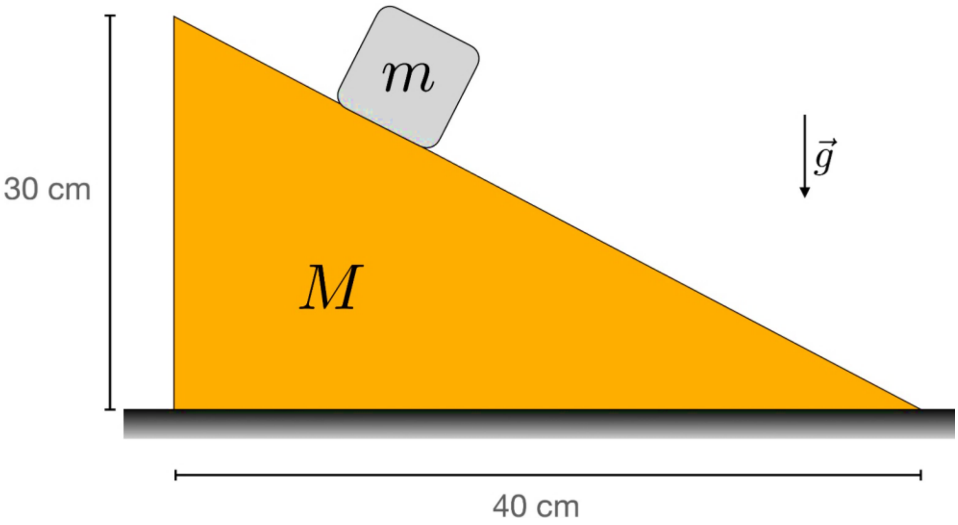
Código do(a) Candidato(a):

QUESTÕES DA ÁREA DE FÍSICA
(Múltipla Escolha)

Instruções: As questões de Física são todas de múltipla escolha. Nessas questões você deve assinalar a resposta que considerar correta neste próprio livro de provas, marcando com um "X" o quadrado correspondente. Use caneta preta ou azul. Nas questões de múltipla escolha não utilize o livro de provas para fazer o desenvolvimento das questões ou para rascunho. Você poderá fazer o desenvolvimento das questões e rascunho no caderno de anotações fornecido. **As respostas que serão consideradas para correção são aquelas assinaladas no livro de provas.**

Questão 1:

Um bloco de massa $m = 1\ kg$ desliza sem atrito sobre uma cunha de massa M, cujas dimensões estão representadas na figura. Existe atrito entre a cunha e a superfície sobre a qual ela repousa e o coeficiente de atrito estático vale $\mu = 1/10$. Use $g = 10 m/s^2$. Qual o menor valor de M (em kg) tal que o bloco deslize sem que a cunha escorregue para a esquerda da figura?



Marque com um "X" o quadrado correspondente a alternativa correta.

☐ 114/35

☐ 4/3

X 104/25

☐ 24/5

☐ Nenhuma das respostas apresentadas

Resposta:

O bloco de massa m = 1kg, ao deslizar, faz uma força normal à superfície inclinada da cunha que vale (veja a figura abaixo):

$N = \mu\, g \cos(\theta)$.

Sabemos $\cos(\theta) = 4/5$, pois a cunha tem o formato de um triângulo retângulo 3-4-5.

A cunha sente, portanto, uma força horizontal para a esquerda representada na figura dada por:

$N_h = m\, g \cos(\theta) \sin(\theta)$

e outra vertical e para baixo dada por :

$N_v = m\, g \cos^2(\theta)$.

A força de atrito estático máxima é então dada por:

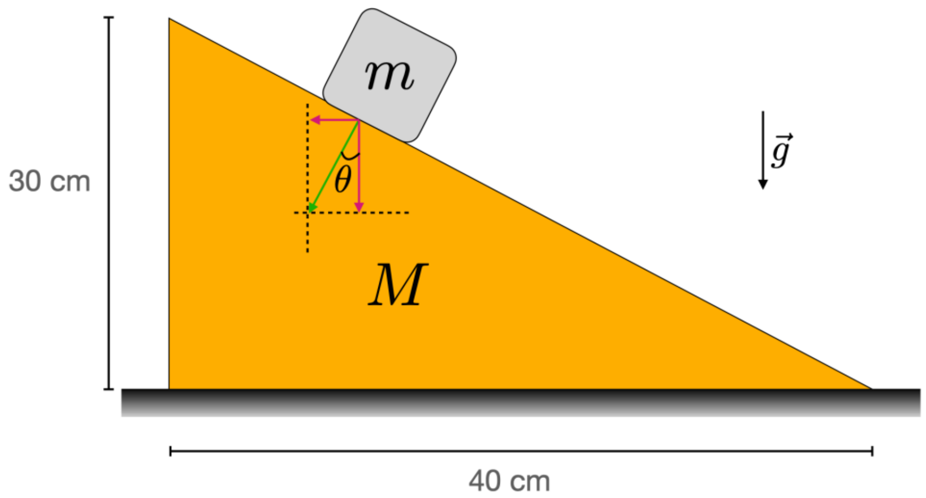
$F_{max} = \mu\, g\, [M + \cos^2(\theta)]$,

pois a reação normal ao plano de apoio é dada pelo peso da cunha somada à componente vertical da força exercida pelo bloco sobre a cunha. Na situação em que a massa M é a mínima tal que a cunha não deslize, estamos na situação de atrito estático máximo, portanto:

$N_h = F_{max}$

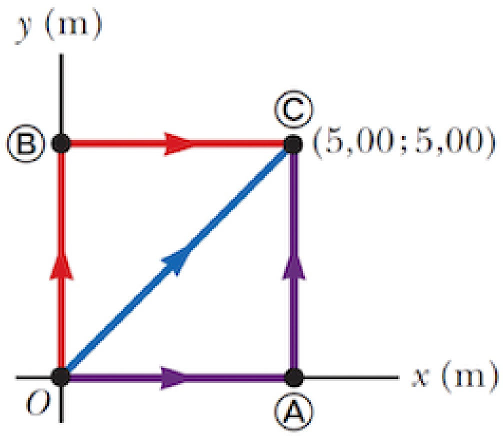
de onde tiramos:

$M_{min} = m \cos(\theta)\, (\sin(\theta)/\mu - \cos(\theta)) = 104/25$ kg.



Questão 2:

Uma partícula move-se no plano xy sob ação de uma força **F** = 2y**i** + x^2**j**, com F dada em Newtons e x e y em metros. A partícula se move da origem à posição final x= 5,00m e y=5,00m (ponto C da figura) por três caminhos diferentes: OAC, OC e OBC. Vamos denotar o trabalho feito pela força sobre a partícula ao longo de cada caminho por W(OAC), W(OC) e W(OBC). Sobre o trabalho realizado em cada um dos caminhos é correto que:



Marque com um “X” o quadrado correspondente a alternativa correta.

☒ W(OBC)<W(OC)<W(OAC)

☐ W(OBC)<W(OAC)<W(OC)

☐ W(OBC)=W(OAC)=W(OC)

☐ W(OC)<W(OAC)<W(OBC)

☐ Nenhuma das respostas apresentadas

Resposta:

1) W(OAC) = 125 J pois no trecho OA não há trabalho (força perpendicular ao deslocamento) e no trecho AC temos **F.dl** = x^2 dy, com x fixo a 5,00m, e portanto:

W(OAC) = $\int_0^5 x^2 dy = 125J$

2. W(OC) = 66.7 J. Neste caso a trajetória é tal que y=x, e portanto dy=dx. Assim, **F.dl** = 2x dx + x^2 dx. Temos então:

W(OC) = $\int_0^5 2xdx + \int_0^5 x^2 dx = 66{,}7J$

3. W(OBC) = 50 J pois o trabalho no trecho OB é zero (força perpendicular ao deslocamento) enquanto no trecho BC temos **F.dl** =2y dx com y=5,00m e assim

W(OBC) = $\int_0^5 2ydx = 50J$

Logo, a resposta correta é W(OBC)<W(OC)<W(OAC).

Questão 3:

Um objeto oscila com frequência angular ω= 8,0 rad/s. Em t = 0 s, o objeto está em x = 4,0 cm com uma velocidade inicial v_x = -25 cm/s. Encontre a amplitude e a constante de fase do movimento e x como função do tempo.

Marque com um "X" o quadrado correspondente a alternativa correta.

☒ 5,1 cm; 0,66 rad; x = (5,1 cm) cos[(8,0 s^{-1}) t + 0,66]

☐ 2,6 cm; 6,6 rad; x = (2,6 cm) cos[(4,0 s^{-1}) t + 6,6]

☐ 5,1 cm; 0,51 rad; x = (5,1 cm) cos[(4,0 s^{-1}) t + 0,51]

☐ 1,8 cm; 0,06 rad; x = (18,0 cm) cos[(8,0 s^{-1}) t + 0,86]

☐ Nenhuma das alternativas anteriores

Resposta:

A posição e velocidade iniciais estão relacionadas com a amplitude e constante de fase.

$x = A\cos(\omega t + \delta)$ e $v_x = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$

Então,

$x_0 = A\cos(\delta)$

e

$v_{0x} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\delta)$.

Logo,

$v_{0x}/x_0 = -\omega A\mathrm{sen}(\delta)/A\cos(\delta) = -\omega\tan(\delta)$.

Portanto,

$\tan(\delta) = -v_{0x}/\omega_{x0}$

$\delta = \tan^{-1}(-v_{0x}/\omega_{x0}) = \tan^{-1}(-(-25\text{ cm/s})/(8{,}0\text{ rad/s})\ (4{,}0\text{ cm}))$
$= 0{,}66\text{ rad}$

$A = x_0/A\cos(\delta) = 4{,}0\text{ cm}/\cos(0{,}66) = 5{,}1\text{ cm}$

$x = (5{,}1\text{ cm})\cos[(8{,}0\text{ s}^{-1})t + 0{,}66]$

Questão 4:

Considere a função de onda harmônica numa corda:

$$Y(x,t) = (0{,}030\ m)\ sen[(2{,}2\ m^{-1})\ x - (3{,}5\ s^{-1})\ t]$$

Qual é o comprimento de onda, período e a velocidade máxima de qualquer ponto na corda?

Marque com um “X” o quadrado correspondente a alternativa correta.

☐ 0,4 m; 1,7 s; 1,1 m/s

☐ 5,8 m; 0,9 s; 3,5 m/s

X 2,9 m; 1,8 s; 0,11 m/s

☐ 0,3 m; 2,2 s; 0,35 m/s

☐ Nenhuma das alternativas anteriores

Resposta:

A onda se propaga na direção +x.

$v = \lambda/T = \omega/k = 3{,}5\ s^{-1}/2{,}2\ m^{-1} = 1{,}6\ m/s$

$\lambda = 2\pi/k = 2\pi/2{,}2\ m^{-1} = 2{,}9\ m$

$T = 2\pi/\omega = 2\pi/3{,}5\ s^{-1} = 1{,}8\ s$

$f = 1/T = 1/1{,}8\ s = 0{,}56\ Hz$

$A = 0{,}030\ m$

$v_y = (0{,}030\ m)\ (-3{,}5\ s^{-1})\ \cos[(2{,}2\ m^{-1})\ x - (3{,}5\ s^{-1})\ t]$

$= -\ (0{,}105\ m/s)\ \cos[(2{,}2\ m^{-1})\ x - (3{,}5\ s^{-1})\ t]$

$v_{y,max} = 0{,}11\ m/s$

Questão 5:

Um reservatório com um êmbolo móvel está em contato com uma placa aquecida, inicialmente, esse reservatório continha 1,00 kg de água líquida a 100 ^oC que foi completamente convertida em vapor a 100 ^oC por ebulição à pressão atmosférica (1,01 $x10^5$ Pa). O volume mudou 1,00 $x10^{-3}$ m^3, no estado líquido, para 1,671 m^3 de vapor d'água apenas. Sabendo que o calor de fusão para a água é de 333 kJ/kg e o de vaporização é de 2260 kJ/kg, determine:

Calcule: W, o trabalho realizado pelo sistema durante esse processo; Q, a quantidade de calor adicionada no processo; e ΔU, a mudança da energia interna.

Marque com um "X" o quadrado correspondente a alternativa correta.

☐ nenhuma das respostas apresentadas

X W= 169 kJ; Q= 2260 kJ; ΔU= 2,09 MJ

☐ W= 68 kJ; Q= 2260 kJ; ΔU= 2,43 MJ

☐ W= 68 kJ; Q= 0 kJ; ΔU= 2,09 MJ

☐ W = 169 kJ; Q = 333 kJ; ΔU= 2,09 MJ

Resposta:

a) Como a pressão é constante durante o processo de ebulição, o trabalho é calculado pela equação a seguir, em que a pressão pode ser colocada fora da integral.

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\, dV = P(V_f - V_i) = 1{,}01 \cdot 10^5\ Pa \cdot (1{,}671\ m^3 - 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ m^3) = 169\ kJ$$

b) Como não há mudança de temperatura, mas somente uma mudança de fase, usamos o calor de transformação referente ao processo de vaporização:

$$Q = L \cdot m = 2260 \frac{kJ}{1{,}00} kg = 2260\ kJ$$

c) A mudança da energia interna é obtida pela primeira Lei da Termodinâmica:

$$Q = \Delta U + W \rightarrow \Delta U = Q - W$$

$$\Delta U = 2260\ kJ - 169\ kJ = 2{,}09\ MJ$$

Essa quantidade é positiva, pois a energia interna do sistema aumentou. Ela é menor que o valor adicionado no sistema porque aproximadamente 169 kJ de calor adicionado foi transformado em trabalho externo contra a pressão atmosférica.

QUESTÕES DAS ÁREAS DE COMPUTAÇÃO
(Dissertativas)

Instruções: As questões específicas de Computação são todas dissertativas. Nelas você deve apresentar todo o desenvolvimento da questão neste próprio livro de provas (no espaço reservado logo abaixo de cada questão). Use caneta azul ou preta. Você poderá fazer anotações e cálculos no caderno de anotações fornecido, mas **as respostas consideradas para a correção serão aquelas apresentadas no espaço reservado no livro de provas.**

Questão 1:

Calcule a transformada de Fourier da função

$$g(t) = 3\delta(t - t_o)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. Indique qual a definição de Transformada de Fourier usada, e mantenha os passos intermediários do desenvolvimento do resultado.

Solução: Trabalhando com a seguinte definição de transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(t) e^{i\omega t} dt$$

onde ω é a frequência angular, e substituindo $g(t)$ temos

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g\,(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 3\,\delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = 3e^{-i\omega t_0}$$

devido à propriedade de amostragem da função delta de Dirac.

Observações: Dependendo da definição de Transformada de Fourier usada, pode haver uma troca de sinal do expoente ou a inclusão de um fator $1/2\pi$ ou $1/\sqrt{2\pi}$. Também, a transformada pode ser expressa em termos da frequência $f = \omega/2\pi$.

Questão 2:

Escreva uma função que recebe um *array* (vetor) de valores de ponto flutuante de precisão dupla e dois parâmetros a e b, com $a \leq b$, e retorne a média de todos os valores no *array* que caem dentro do intervalo $[a, b]$.

Use C, C++, Fortran ou Java na sua resposta.

Solução: Uma possível solução em C é a seguinte:

```
double sumPartial(double *v, size_t n, double a, double b)
{
    double s = 0;
    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        if (v[i] >= a && v[i] <= b) {
            s += v[i];
        }
    }
    return s;
}
```

Questão 3:

Considerando um número inteiro positivo n, seus divisores são os números inteiros positivos k (incluindo o próprio n) que dividem n sem resto. Por exemplo, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. A função soma dos divisores positivos $\sigma(n, x)$, para n inteiro positivo e x um número real qualquer, é definida como:

$$\sigma(n, x) = \sum_{k \in d(n)} k^x$$

onde $d(n)$ é o conjunto dos divisores de n.

Escreva uma função que, dados n e x, calcule $\sigma(n, x)$. Use ponto flutuante de precisão dupla para representar números reais.

Use C, C++, Fortran ou Java na sua resposta

Solução: Uma possível solução em C seria:

```
double sigma(int n, double x)
{
    double s = 1.0;
    for (int i = 2; i <= n; ++i) {
        if (n % i == 0) {
            s += pow(i, x);
        }
    }
    return s;
}
```

Questão 4:

Considere um grafo não direcionado *G* com as seguintes conexões entre os vértices:

(1,2), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)

Parte A:

Considere as seguintes afirmações a respeito do grafo G:

I) G é bipartido.
II) G é um grafo completo.
III) G tem um ciclo euleriano.
IV) G é um grafo planar.

Para cada uma, indique se ela é verdadeira ou falsa e explique.

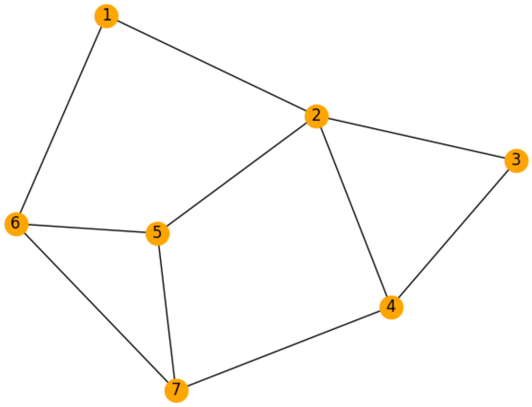
Parte B:

Considere que um vértice arbitrário v em G seja removido, juntamente com todas as suas arestas incidentes. Como resultado, as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas? Explique.

V) O grafo resultante será desconexo.
VI) O grafo resultante será planar.
VII) O grafo resultante terá um ciclo Euleriano.
VIII) O grafo resultante será bipartido.

Espaço Reservado para a resposta da Questão 4 (página 1):

Solução:



Parte A:

I) Falso. Não é possível dividir os vértice 2, 3 e 4 em dois grupos sem que haja uma conexão entre dois vértices do mesmo grupo.

II) Falso. Faltam ligações entre vários pares de vértices (exemplo, 1 e 5).

III) Falso. Existem vértices com grau ímpar.

IV) Verdadeiro. A figura demonstra isso.

Parte B:

V) Falso. Neste caso, a retirada de qualquer vértice mantém a conectividade dos restantes.

VI) Verdadeiro. Um subgrafo de um grafo planar é planar.

VII) Falso. Mesmo se retirado um vértice de grau ímpar, ainda restam outros vértice de grau ímpar.

VIII) Falso. Além do triângulo 2, 3, 4 da Parte A, existe ainda o triângulo 5, 6, 7. Não é possível quebrar os dois com a retirada de apenas um vértice.

Questão 5:

Considere uma árvore AVL inicialmente vazia. Os seguintes elementos são inseridos na seguinte ordem: 30, 19, 42, 10, 24, 35, 51, 6, 14. Após a inserção de todos esses elementos, para cada uma das seguintes afirmações sobre a árvore resultante indique se ela é verdadeira ou falsa? Justifique.

I) A árvore tem uma altura de 3.

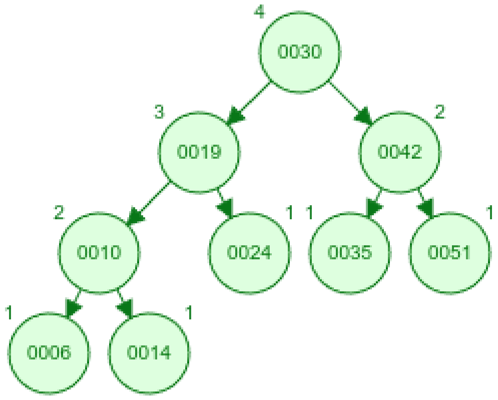
II) A árvore contém exatamente 4 folhas.

III) O nó com valor 30 tem apenas um filho.

IV) Todos os nós da árvore têm fatores de balanceamento que variam entre -1 e 1.

V) A árvore contém um nó com fator de balanceamento 2.

Solução:



I) Falso. A profundidade é 4.

II) Falso. Existem 5 folhas.

III) Falso. A raiz tem dois filhos.

IV) Verdadeiro. Essa é a propriedade básica da árvore AVL.

V) Falso. Se verdadeiro, violaria a propriedade da árvore AVL.