Universidade de São Paulo

Instituto de Física de São Carlos

Programa de Pós-graduação

Exame de Ingresso

Física Computacional

Primeiro Semestre de 2024

GABARITO

Código do(a) Candidato(a):

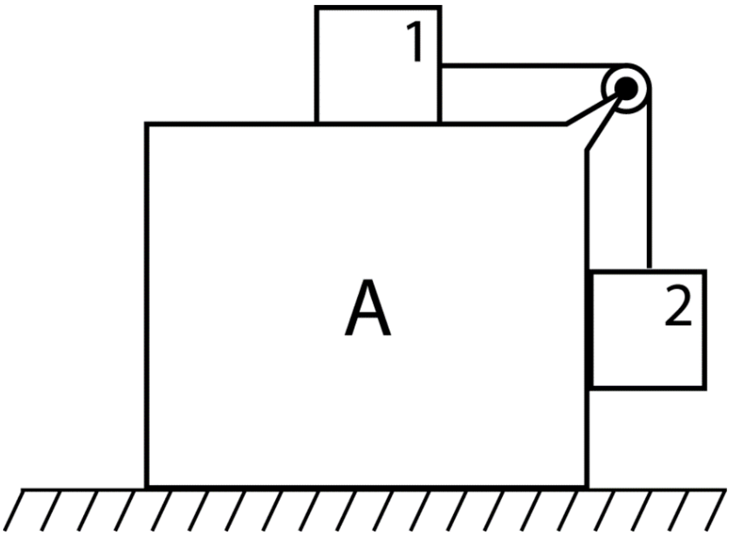
QUESTÕES DA ÁREA DE FÍSICA

(Múltipla Escolha)

Instruções: As questões de Física são todas de múltipla escolha. Nessas questões você deve assinalar a resposta que considerar correta neste próprio livro de provas, marcando com um "X" o quadrado correspondente. Use caneta preta ou azul. Nas questões de múltipla escolha não utilize o livro de provas para fazer o desenvolvimento das questões ou para rascunho. Você poderá fazer o desenvolvimento das questões e rascunho no caderno de anotações fornecido. **As respostas que serão consideradas para correção são aquelas assinaladas no livro de provas.**

Questão 1:

Na figura abaixo as massas dos corpos 1 e 2 são iguais e o coeficiente de atrito estático entre corpo A e os corpos 1 e 2 é igual a μ. A massa da polia e das cordas são desprezíveis e não há atrito na polias. Qual é a aceleração mínima com a qual o corpo A da figura deve ser deslocado horizontalmente de modo a manter os corpos 1 e 2 estacionários em relação a ele?



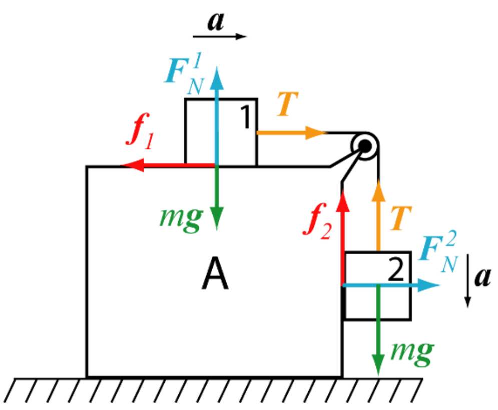
Marque com um “X” o quadrado correspondente a alternativa correta.

- [ ] $a_{min} = [(1-2\mu)/(1+\mu)]g$
- [ ] $a_{min} = [(1+\mu)/(1-\mu)]g$
- [ ] $a_{min} = [(1-\mu)/(1+2\mu)]g$
- [x] $a_{min} = [(1-\mu)/(1+\mu)]g$
- [ ] $a_{min} = [(1-2\mu)/(1+2\mu)]g$

Resposta:

Os corpos 1 e 2 permanecerão em repouso com relação ao bloco A para $a_{min} \leq a \leq a_{max}$, onde a_{min}é a mínima aceleração procurada para o bloco A. Além desses limites haverá movimento relativo entre o bloco A e os corpos. Para $0 \leq a \leq a_{min}$ a tendencia do corpo 1 é se mover para a direita em relação ao bloco A. Com base nesse argumento, para fins de cálculo de a_{min}, a força de atrito estática no corpo 2 é direcionada para cima e no corpo 1 é direcionada para a esquerda.

O diagrama de forças para os corpos 1 e 2 fica então.



Vamos escrever a segunda lei de Newton para os corpos 1 e 2 na direção horizontal.

$$T - f_1 = ma \rightarrow f_1 = T - ma \qquad (1)$$
$$F_N^2 = ma \qquad (2)$$

Como o corpo 2 não tem aceleração vertical, então:

$$f_2 = mg - T \qquad (3)$$

De (1) e (3)

$$f_1 + f_2 = mg - ma \qquad (4)$$

Para a situação sem deslizamento dos corpos em relação ao bloco A deve-se ter:

$$f_1 + f_2 \leq \mu(F_N^1 + F_N^2) \rightarrow \ f_1 + f_2 \leq \mu(mg + ma) \qquad (5)$$

Logo, de (4) e (5):

$$mg - ma \leq \mu(mg + ma) \qquad (6)$$

Resolvendo para a:

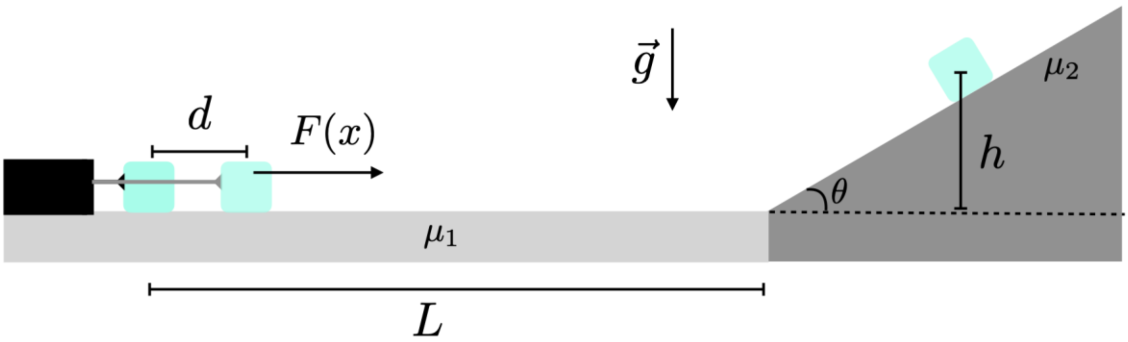
$$a \geq \frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} g \qquad (7)$$

Portanto:

$$\boxed{a_{min} = \frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} g}$$

Questão 2:

Um motor equipado com um braço mecânico empurra um bloco de massa $m = 1{,}0\,kg$ por uma distância $d = 0{,}3\,m$, imprimindo uma força dada por $F(x) = Cx^2$ partindo da origem do sistema de coordenadas e com a constante $C = 1000\,N/m^2$. No primeiro trecho, de comprimento $L = 1{,}0\,m$, o coeficiente de atrito cinético do bloco com a superfície é de $\mu_1 = 0{,}1$. O bloco então sobe um plano inclinado de um ângulo θ , com coeficiente de atrito cinético tal que $\mu_2/tg(\theta) = 1$. Use $g = 10\,m/s^2$. A altura h que o bloco sobe antes de iniciar a descida vale:



Marque com um "X" o quadrado correspondente a alternativa correta.

- [ ] 0,10m
- [ ] 0,15m
- [ ] 0,20m
- [x] 0,40m
- [ ] 0,50m

Resposta:

O trabalho feito pela força durante o deslocamento d é obtido por integração, e vale $Cd^3/3$. Enquanto o bloco desliza no plano, a força de atrito cinético faz trabalho negativo, contra o movimento, no valor de $-\mu_1 mgL$. Com isso, sabemos a energia cinética do bloco ao iniciar a subida da rampa. Levando em conta o trabalho do atrito na subida, ele atinge a altura máxima dada por:

$$h = \frac{(Cd^3/3 - \mu_1 mgL)}{\left(mg\left(1 + \frac{\mu_2}{tg\theta}\right)\right)} = 0{,}4\ m$$

Questão 3:

Um pêndulo simples de $1\,m$ de comprimento fica em equilíbrio fazendo um ângulo de $1°$ com a vertical quando um ventilador que produz vento horizontal com velocidade $V = \sqrt{10}/2$ m/s está ligado. Aqui supomos que a força de arrasto é do tipo $-bV$. O ventilador é desligado e este pêndulo então oscila, com amortecimento devido à força de arrasto. Suponha, em todo exercício, que as oscilações são pequenas e use as aproximações adequadas. Use $g = 10m/s^2$ e considere que ω_0 representa a frequência de oscilação livre deste pêndulo.

Qual a frequência de oscilação do pêndulo amortecido para pequenas oscilações?

Dado: para um oscilador genérico de equação de movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

a frequência de oscilação é $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2}$.

Marque com um "X" o quadrado correspondente a alternativa correta.

- [x] $\omega_0\sqrt{1 - \pi^2/32400}$
- [ ] $\omega_0\sqrt{1 - \pi^2/11200}$
- [ ] $\omega_0\sqrt{1 - \pi^2/5200}$
- [ ] $\omega_0\sqrt{1 - \pi^2/1800}$
- [ ] $\omega_0\sqrt{1 - \pi^2/64000}$

Resposta:

Primeiramente, podemos encontrar o valor de b deste problema dada a condição de equilíbrio do pêndulo. Temos

$$b = \frac{mg\tan\theta_0}{V}$$

Onde θ_0 é o ângulo de equilíbrio, m é a massa do pêndulo, V e g estão definidos no enunciado.

Podemos escrever a aceleração tangencial e a velocidade do pêndulo como função do ângulo $\theta(t)$ feito com relação a vertical. Temos $a = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ e $V = l\frac{d\theta}{dt}$, onde l é o comprimento do pêndulo. A projeção tangencial da força peso é $-mg\,\text{sen}\theta$. Com isso podemos escrever $F = ma$ para o pêndulo levando em conta a força da gravidade e a força de arrasto. A equação do movimento fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

onde já usamos que $\text{sen}\theta \approx \theta$. A frequência de oscilação livre é $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

Temos para a frequência na presença do amortecimento, usando $\tan\theta \approx \theta$,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{lg\theta_0^2}{4V^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{32400}}$$

Questão 4:

Um sistema consiste de $0{,}32$ moles de um gás ideal monoatômico, com $C_V = 3RT/2$, ocupando um volume de $2{,}2\ L$ numa pressão de $2{,}4\ atm$ (ponto A). O sistema passar por um ciclo que consiste de três processos:

1. O gás é aquecido a pressão constante até seu volume ser $4{,}4\ L$ (ponto B).
2. O gás é resfriado a volume constante até sua pressão diminuir para $1{,}2\ atm$ (ponto C).
3. O gás sofre um processo de compressão isotérmica até voltar ao ponto inicial (ponto A).

Considere o trabalho positivo como aquele que é feito sobre o sistema e o calor positivo aquele entregue ao sistema. Qual é o trabalho, o calor, e a variação de energia interna em todo o ciclo?

Marque com um "X" o quadrado correspondente a alternativa correta.

☐ Nenhuma das respostas apresentadas

☐ $+\ 0{,}96\ kJ;\ -\ 0{,}96\ kJ;\quad 0{,}00\ kJ$

☐ $+\ 0{,}32\ kJ;\ -\ 0{,}64\ kJ;\ +\ 0{,}32\ kJ$

☐ $-\ 0{,}32\ kJ;\ +\ 0{,}64\ kJ;\ +\ 0{,}32\ kJ$

■ $-\ 0{,}16\ kJ;\ +\ 0{,}16\ kJ;\quad 0{,}00\ kJ$

Resposta:

As temperaturas dos pontos A, B e C são dadas por:

$$T_C = T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 200\ K; \qquad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_A(2V_A)}{nR} = T_A = 400\ K;$$

O trabalho no processo 1 é: $W_1 = -P_A \Delta V = -P_A(V_B - V_A) = -535\ J$
O calor no processo 1 é: $Q_1 = C_P \Delta T = \frac{5}{2} nR\Delta T = 1337\ J$
A variação da energia interna no processo 1 é: $\Delta E_{int1} = Q_1 + W_1 = 802\ J$

O trabalho no processo 2 é: $W_2 = 0\ J$
O calor no processo 2 é: $Q_2 = C_V \Delta T = \frac{3}{2} nR\Delta T = -802\ J$
Como $W_2 = 0 \ \rightarrow \Delta E_{int2} = Q_2 \ = -802\ J$

O trabalho no processo 3 é: $W_3 = nRT_A ln\frac{V_A}{V_C} = 371\ J$
O variação da energia interna no processo 3 é: $\Delta E_{int3} = 0\ J$
O calor no processo 3 é: $Q_3 = \Delta E_{int3} - W_3 = -371\ J$

Tem-se então:

$W_{total} = W_1 + W_2 + W_3 = -164\ J$
$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 164\ J$
$\Delta E_{int-total} = \Delta E_{int1} + \Delta E_{int2} + \Delta E_{int3} = 0\ J$

Questão 5:

Considere a função de onda harmônica em uma corda:

$$y(x,t) = (0{,}030\ m)\mathrm{sen}[(2{,}2\ m^{-1})x - (3{,}5\ s^{-1})t]$$

Qual é o comprimento de onda, período e a velocidade transversal máxima de qualquer ponto na corda?

Marque com um “X” o quadrado correspondente a alternativa correta.

- [ ] $0{,}4\ m;\ 1{,}7\ s;\ 1{,}1\ m/s$
- [ ] $5{,}8\ m;\ 0{,}9\ s;\ 3{,}5\ m/s$
- [x] $2{,}9\ m;\ 1{,}8\ s;\ 0{,}11\ m/s$
- [ ] $0{,}3\ m;\ 2{,}2\ s;\ 0{,}35\ m/s$
- [ ] nenhuma das respostas apresentadas

Resposta:

A expressão geral para uma função de onda senoidal é:

$$y(x,t) = A\text{sen}[kx - \omega t]$$

Por comparação direta com a função de onda dada no problema tem-se que $k = 2{,}2\, m^{-1}$ and $\omega = 3{,}5\, rad/s$.

O comprimento de onda é $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2{,}9\, m$

O período é $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}8\, s$

A velocidade vertical de oscilação é:

$$V_y = \frac{dy}{dt} = (-0,105\ m/s)\cos[(2{,}2\ m^{-1})x - (3{,}5\ s^{-1})t]$$

Portanto, a máxima velocidade vertical será: $V_{y,max} = 0,105\ m/s$

QUESTÕES DAS ÁREAS DE COMPUTAÇÃO

(Dissertativas)

Instruções: As questões específicas de Computação são todas dissertativas. Nelas você deve apresentar todo o desenvolvimento da questão neste próprio livro de provas (no espaço reservado logo abaixo de cada questão). Use caneta preta azul ou preta. Você poderá fazer anotações e cálculos no caderno de anotações fornecido, mas **as respostas consideradas para a correção serão aquelas apresentadas no espaço reservado no livro de provas.**

Questão 1:

Considere os pontos (-1, 5), (0, 3), (1, 5) e (2, 17). Determine o polinômio interpolador que passa exatamente por todos esses pontos.

Resposta:

Solução: No caso geral, para um polinômio passar por 4 pontos, ele deve ter grau 3. Para resolver o problema o candidato deve considerar o polinômio:

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

e com os pontos dados montar um sistema de 4 equações nas 4 incógnitas que são os coeficientes do polinômio:

$$
\begin{aligned}
a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d &= 5 \\
a0^3 + b0^2 + c0 + d &= 3 \\
a1^3 + b1^2 + c1 + d &= 5 \\
a2^3 + b2^2 + c2 + d &= 17
\end{aligned}
$$

Resolvendo esse sistema, se chega no resultado, que é:

$x^3 + 2x^2 - x + 3$

Questão 2:

Os números de Pell são gerados pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 1 \\ p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, n > 1 \end{cases}$$

Escreva uma função que, dado um número inteiro n, retorne o n-ésimo número de Pell p_n.

Use C, C++, Fortran ou Java na sua resposta

Resposta:

Solução: Uma possível solução em C é a seguinte:

```
int pell(int n) {
  int p[2] = {0, 1};
  if (n < 2) return p[n];
  while (n >= 2) {
    int next = 2 * p[1] + p[0];
    p[0] = p[1];
    p[1] = next;
    --n;
  }
  return p[1];
}
```

Questão 3:

Escreva uma função que, dado um array de números em ponto flutuante, determine o índice do elemento com o maior valor absoluto no array, sem alterar os valores originais no array. Se houver vários elementos com o mesmo valor máximo absoluto, a função deve retornar o índice do primeiro desses elementos.

Use C, C++, Fortran ou Java na sua resposta

Resposta:

Solução: Uma possível solução em C seria:

```
size_t imax_abs(double *v, size_t N) {
  double amax = 0;
  size_t imax = 0;
  for (size_t i = 0; i < N; ++i) {
    if (fabs(v[i]) > amax) {
      amax = fabs(v[i]);
      imax = i;
    }
  }
  return imax;
}
```

Questão 4:

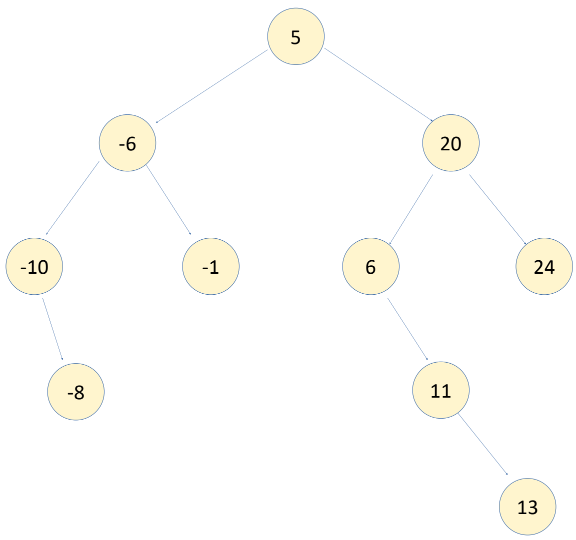
Começando com uma árvore de busca binária que está vazia no início, insira os seguintes valores, um de cada vez, na ordem indicada:

5, 20, 6, -6, -10, -1, 11, 24, 13, -8

Desenhe a estrutura da árvore após todas as inserções.

Resposta:

Solução: O resultado será como na figura abaixo:



Questão 5:

Considere um grafo direcionado e não ponderado, com características esparsas, onde o número de arestas (E) é assintoticamente proporcional ao número de vértices (N), ou seja, $E = O(N)$. Realize uma comparação entre as representações do grafo por matriz de adjacência, lista de adjacência e lista de arestas, em termos de desempenho na execução do algoritmo de busca em largura (BFS) nesse tipo de grafo.

Resposta:

Solução: Dado que o grafo é esparsamente conectado, com $E = O(N)$, a utilização de uma matriz de adjacência, que requer uma representação com N^2 elementos, não é uma escolha eficiente em termos de espaço. Além disso, essa representação não se mostra eficiente em termos de tempo de execução durante a aplicação do algoritmo BFS. Nesse algoritmo, é necessário visitar continuamente vértices e encontrar seus vizinhos. No entanto, a busca pelos vizinhos de um vértice na matriz de adjacência tem um custo de O(N), o que resultaria em um algoritmo BFS com complexidade de $O(N^2)$.

As representações por lista de adjacência e lista de arestas são ambas eficientes em termos de uso de memória. No entanto, a lista de adjacência é especialmente adequada para o algoritmo BFS. Isso ocorre porque, na lista de adjacência, os vizinhos de cada vértice já estão armazenados diretamente, o que torna a busca por vizinhos eficiente. Por outro lado, na lista de arestas, a busca por todos os vizinhos de um vértice específico requer a varredura completa da lista de arestas, tornando-a menos eficiente nesse contexto.