Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 48, e20250430 (2026)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2025-0430

Artigos Gerais

Estrutura distribucional de derivadas singulares: aplicações em eletrostática e elasticidade

Distributional structure of singular derivatives: applications in electrostatics and elasticity

Pedro de Castro Diniz[1], Aristeu R.P. Lima[2], Emanuel A.L. Henn*[1]

[1]Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil.
[2]Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, CE, Brasil.

Recebido em 01 de outubro de 2025. Revisado em 05 de dezembro de 2025. Aceito em 06 de janeiro de 2026.

Derivadas singulares de $1/r$, como $\nabla^2(1/r)$ e $\partial_i\partial_j(1/r)$, aparecem frequentemente em contextos como eletrostática, magnetostática, elasticidade linear e até mesmo no tratamento de condensados de Bose-Einstein. Neste trabalho, mostramos como extrair de forma sistemática a parte singular dessas distribuições, proporcional à distribuição delta de Dirac, utilizando identidades vetoriais e integração por partes em uma vizinhança da origem. O foco principal é a identidade de Frahm, mas também recuperamos resultados clássicos como o laplaciano de $1/r$ e derivadas relacionadas à função de Green da equação de Navier-Cauchy. A abordagem revela uma estrutura regularizante comum subjacente a diversos operadores diferenciais com suporte pontual.
Palavras-chave: Singularidade, teoria de distribuições, eletromagnetismo, elasticidade, física matemática.

Singular derivatives of $1/r$, such as $\nabla^2(1/r)$ and $\partial_i\partial_j(1/r)$, frequently appear in contexts such as electrostatics, magnetostatics, linear elasticity, and even Bose–Einstein condensates. In this work, we show how to systematically extract the singular part of these distributions, proportional to the Dirac delta distribution, by employing vector identities and integration by parts in a neighborhood of the origin. The main focus is Frahm's identity, but we also recover classical results such as the Laplacian of $1/r$ and derivatives related to the Green's function of the Navier–Cauchy equation. The approach reveals a common regularizing structure underlying various differential operators with point support.
Keywords: Singularity, distribution theory, electromagnetism, elasticity, mathematical physics.

1. Introdução

Quando representamos uma carga elétrica [1, 2], massa [3] ou força [4] como concentrada em um único ponto do espaço, estamos fazendo uma idealização: tratamos um objeto com extensão física real como se tivesse volume zero. De fato, em contextos didáticos de gravitação e forças eletrostáticas, mesmo distribuições não pontuais de massa ou carga são explicitamente tratadas como pontuais, desde que seus efeitos sejam medidos de uma distância muito maior que sua extensão.

Essa aproximação, típica do tratamento de física clássica, é útil e costuma descrever bem muitos fenômenos, mas leva a campos que apresentam comportamentos divergentes nas proximidades da fonte. Por exemplo, o campo elétrico de uma carga pontual cresce sem limite quando nos aproximamos da posição da carga.

De fato, singularidades pontuais são elementos recorrentes na formulação de diversos modelos físicos. Para além de cargas elétricas puntiformes [1, 2] e massas concentradas [3], há também dipolos localizados [5–9] e forças pontuais em meios contínuos [4], como exemplos emblemáticos. Em contextos menos convencionais, como fluidos quânticos com interações dipolo-dipolo [10], como condensados de Bose-Einstein de átomos dipolares e/ou moléculas heteronucleares [11], o termo de interação dipolar é costumeiramente tratado, do ponto de vista analítico/computacional no espaço de Fourier, a fim de se evitar a singularidade advinda da interação dipolo-dipolo [10]. No tratamento analítico da solução exata no limite de Thomas-Fermi, entretanto, a identidade de Frahm para dipolos pontuais é diretamente útil [12]. Além disso, em Física Atômica e Molecular, quando lidamos com transições entre dois estados de energia contínua, como acontece em ionização ou dissociação acima do limiar, aparecem operadores que não são bem comportados matematicamente. Isso ocorre porque os estados do contínuo são descritos por funções normalizadas com deltas de Dirac, o que faz com que os operadores relevantes tenham um caráter singular [13].

A teoria de distribuições fornece o formalismo adequado para lidar com essas entidades, permitindo interpretar essas singularidades não como "infinidades físicas", mas como representações compactas e bem definidas de fontes altamente localizadas. Assim, o tratamento matemático rigoroso das distribuições conecta a idealização de partículas pontuais ao comportamento

*Endereço de correspondência: ehenn@ifsc.usp.br
Editor-Chefe: Marcello Ferreira

real dos campos físicos que elas produzem. Dessa forma, para lidar de forma consistente com essas entidades é indispensável recorrer à teoria de distribuições [14–17], que oferece um enquadramento matemático preciso para funções singulares, permitindo tratá-las por meio de sua ação sobre funções teste suaves via integração.

Um exemplo clássico é o laplaciano de $1/r$ (com $r = |\mathbf{r}|$), cuja forma correta é dada por:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \tag{1}$$

identidade fundamental para a eletrostática. É bem estabelecido no contexto de Física Matemática que a delta de Dirac $\delta(\mathbf{r})$ não é uma função no sentido formal, mas uma distribuição, adquirindo significado físico apenas quando aplicada sobre funções bem comportadas dentro de integrações. Da mesma forma, a derivada segunda $\partial_i\partial_j(1/r)$, também chamada de *hessiana* de $1/r$, que surge no cálculo do campo de um dipolo [1] e na elasticidade linear [18], requer uma correção distribucional expressa pela identidade de Frahm [19]:

$$\partial_i\partial_j \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} - \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}), \tag{2}$$

a qual inclui explicitamente um termo proporcional à distribuição delta de Dirac. Nesta equação e ao longo deste texto $x_{i(j)}$ são coordenadas cartesianas usuais.

É importante ressaltar que o contexto da derivação da identidade de Frahm leva em conta suposições típicas de abordagens didáticas de um problema físico: funções suaves e bem comportadas, simetrias esféricas e consistência física [19, 20]. No entanto, esta é apenas uma pequena parte de um tema muito mais complexo [16] e que foge ao escopo deste trabalho, de regularização de distribuições. Por exemplo, Franklin [21] mostra que a identidade de Frahm toma uma forma mais geral quando são consideradas funções-teste não suaves e que isso tem uma consequência física, por exemplo, na escrita do campo elétrico de um dipolo (veja a Ref. [22], equação 2.66 pág 74) que é relevante no problema de dipolos interagentes em mecânica quântica. Já a Ref. [17] mostra que, em um contexto de relatividade especial, é conveniente adotar uma regularização esferoidal – isto é, uma superfície de exclusão não esférica, compatível com a contração de Lorentz – e apresenta também expressões obtidas via regularizações cilíndricas. Essas construções ilustram a discussão do próprio autor de que diferentes geometrias de regularização podem ser empregadas sem modificar o valor das integrais resultantes, exceto em implementações numéricas, onde a malha de integração deve ser levada em conta.

Em contraste com essas possibilidades mais gerais de regularização, neste trabalho adotamos a forma tradicional e mais simples: a regularização esférica, na qual a origem é excluída por uma bola de raio ε. Assim, aplicamos uma formulação operacional alinhada ao procedimento clássico de Frahm: realizamos integração por partes em uma bola de raio ε, B_ε, centrada na origem e tomamos o limite $\varepsilon \to 0$.

As identidades resultantes evidenciam uma estrutura comum a operadores diferenciais singulares em física matemática: cada objeto pode ser descrito como a soma de uma *parte regular*, definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por ser potencialmente divergente na origem, e de uma *contribuição singular* concentrada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, proporcional a $\delta(\mathbf{r})$. Essa moldura unifica, em um mesmo esquema, o caso clássico $\nabla^2(1/r)$ e outras segundas derivadas de $1/r$, que aparecem em diversos contextos físicos além da eletrostática.

Além do papel didático, o desenvolvimento reúne um procedimento operacional claro para obter tais identidades – testar contra funções suaves, integrar em B_ε, integrar por partes e tomar $\varepsilon \to 0$ – e, assim, pode ser reutilizado em elasticidade, escoamentos de Stokes, gravitação e problemas afins.

Este trabalho está estruturado, no que segue, da seguinte forma: na seção 2 iniciamos descrevendo detalhadamente o procedimento operacional descrito nos parágrafos anteriores para extrair a parte singular das derivadas de funções mal comportadas na origem. Em seguida, nas seções 3 e 4 exemplificamos o procedimento com alguns exemplos com relevância física, a equação de Frahm e a equação de Navier-Cauchy. Este trabalho encerra-se com uma seção de conclusões onde sumarizamos nosso objetivo principal: o desenvolvimento de uma formulação operacional para tratar derivadas de funções singulares.

2. Extração da Parte Singular via Integração por Partes

Nosso objetivo mais geral neste trabalho é isolar, de modo direto, a contribuição concentrada na origem que aparece em operadores diferenciais singulares. Para isso, o procedimento é operacional e intuitivo: trabalhamos dentro de uma bola B_ε centrada na origem, removendo o ponto singular e multiplicamos o operador por uma função teste suave ϕ. Este processo explicita que objetos singulares são tratados como distribuições, ou seja, são definidas pelo seu efeito em uma função suave qualquer sob o sinal de integração. Aplicamos então integração por partes para reescrever a integral como soma de um termo de superfície em $|\mathbf{r}| = \varepsilon$ e um termo de volume. Por fim, fazemos $\varepsilon \to 0$.

De modo simplificado, a razão pela qual este procedimento é efetivo é que a suavidade de ϕ permite tratá-la como uma constante na vizinhança da origem ou ainda estimar sua variação por expansão simples em ordens baixas, de modo que o termo de volume se anula por simetria e/ou escala, enquanto o termo de superfície captura exatamente o coeficiente do termo singular, ou seja, o múltiplo da delta de Dirac $\delta(\mathbf{r})$.

Após aplicar o procedimento ao caso protótipo $\nabla^2(1/r)$, apresentaremos com mais cuidado a interpretação distribucional – em particular, a noção de *valor principal (PV)* como parte regular e a separação PV + termo singular - para então reutilizar o mesmo procedimento nos exemplos subsequentes.

2.1. Integração por partes em $\phi\,\nabla^2(1/r)$

Comecemos pelo caso mais simples, que servirá de modelo do método. Pontualmente, fora da origem, vale $\nabla^2(1/r) = 0$ para $r \neq 0$. Ainda assim, ao integrar contra uma função teste suave ϕ, a singularidade em $r = 0$ pode contribuir. É esse efeito que queremos capturar de modo sistemático via integração por partes.

Partimos da regra do produto do cálculo vetorial,

$$\nabla \cdot \big(\phi\,\nabla(1/r)\big) = \nabla\phi \cdot \nabla(1/r) + \phi\,\nabla^2(1/r). \tag{3}$$

Integramos em B_ε e aplicamos o Teorema da Divergência no lado esquerdo, obtendo a integral de superfície em $|\mathbf{r}| = \varepsilon$:

$$\begin{aligned}\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\ = \int_{B_\varepsilon} \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\,d^3r + \int_{B_\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\,d^3r.\end{aligned} \tag{4}$$

Reorganizando os termos, de forma que o objeto de interesse fique do lado esquerdo da equação, chegamos à forma que usaremos como procedimento padrão:

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\,d^3r \\ = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS - \int_{B_\varepsilon}\nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\,d^3r.\end{aligned} \tag{5}$$

Tratemos agora de cada parcela do lado direito. No termo de volume, aproximamos $\nabla\phi(\mathbf{r}) \approx \nabla\phi(\mathbf{0})$ em B_ε e extraímos essa constante:

$$\int_{B_\varepsilon}\nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d^3r \approx \nabla\phi(\mathbf{0})\cdot\int_{B_\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d^3r. \tag{6}$$

Façamos o cálculo da integral restante de forma explícita usando $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$:

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d^3r &= \int_0^\varepsilon\int_{S^2}\left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)r^2\,d\Omega\,dr \\ &= -\int_0^\varepsilon\int_{S^2}\hat{\mathbf{r}}\,d\Omega\,dr = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

pois a integral do versor radial sobre o ângulo sólido é nula por simetria ($\int_{S^2}\hat{\mathbf{r}}\,d\Omega = \mathbf{0}$), ou seja, as contribuições vetoriais se cancelam em todas as direções.

Para o termo de superfície, seguimos o mesmo espírito e aproximamos $\phi(\mathbf{r}) \approx \phi(\mathbf{0})$ em $|\mathbf{r}| = \varepsilon$. Essa aproximação é tão melhor quanto mais próximo $\epsilon \to 0$, que é justamente o limite que vamos tomar. Dessa forma:

$$\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \;\approx\; \phi(\mathbf{0})\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS. \tag{8}$$

Como $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ e $r = \varepsilon$ na superfície,

$$\begin{aligned}\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)\cdot\hat{\mathbf{r}}\,dS \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\,4\pi\varepsilon^2 = -4\pi,\end{aligned} \tag{9}$$

e, portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -4\pi\,\phi(\mathbf{0}). \tag{10}$$

Tomando o limite em (5), obtemos o resultado clássico – agora estabelecido como primeiro exemplo do procedimento:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\phi(\mathbf{r})\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\,d^3r = -4\pi\,\phi(\mathbf{0}). \tag{11}$$

Na linguagem de distribuições, escrevemos então $\nabla^2(1/r) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r})$.

Cabe uma observação importante: a integração em B_ε isola apenas a *parte singular* da distribuição. Neste caso específico, ela coincide com a distribuição inteira porque a *parte regular* é nula em $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Nos exemplos seguintes isso não ocorrerá em geral, e por isso introduziremos explicitamente a decomposição em valor principal (PV) e termo singular.

Este exemplo fixa o modelo que seguiremos adiante: integração por partes para separar "superfície + volume", anulação do termo de volume por simetria ou ordem de grandeza, e leitura do coeficiente singular no termo de superfície. Em seguida, formalizaremos a linguagem distributiva (PV e parte singular) e aplicaremos a mesma estratégia a derivadas mais complexas, como as que surgem na identidade de Frahm.

2.2. Interpretação distribucional: PV + parte singular

Quando uma expressão, aqui genericamente denominada T, apresenta uma singularidade na origem, sua avaliação ponto a ponto não é matematicamente bem definida. O tratamento adequado é via distribuições: em vez de avaliarmos a função T em si, consideramos sua ação sobre uma função teste suave ϕ, ou seja, avaliamos o produto $\langle T,\phi\rangle = \int T\phi(\mathbf{r})d^3r$.

Como no exemplo de $\nabla^2(1/r)$, trabalharemos no sentido distribucional: aplicamos o objeto a uma função teste suave ϕ. Na presença de singularidade na origem, interpretamos as integrais no domínio perfurado $\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon$ e só ao final tomamos $\varepsilon \to 0$. Esse procedimento evidencia, de forma limpa, a contribuição regular – bem comportada fora da origem – e a parcela concentrada em $\mathbf{0}$.

Chamaremos de parte regular o *valor principal* (PV). Operacionalmente, ele é precisamente a interpretação obtida pelo procedimento, agora familiar, de remover a bola B_ε na integração, trabalhar em $\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon$ e então fazer $\varepsilon \to 0$. Para um integrando singular $f(\mathbf{r})$, escrevemos

$$\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r})\, d^3r \;\equiv\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\mathbf{r}|>\varepsilon} f(\mathbf{r})\, d^3r,$$

e, de forma análoga, definimos o emparelhamento de $\mathrm{PV}(T)$ por

$$\big\langle \mathrm{PV}(T),\, \phi \big\rangle \;\equiv\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\mathbf{r}|>\varepsilon} T(\mathbf{r})\, \phi(\mathbf{r})\, d^3r,$$

onde $T(\mathbf{r})$ coincide com T fora da origem. Com essa linguagem, podemos interpretar

$$T = \mathrm{PV}(T) + T_{\text{sing}},$$

onde $\mathrm{PV}(T)$ captura a parte regular e T_{sing} reúne o que está concentrado em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (múltiplos de δ e, se necessário, de suas derivadas). Em termos práticos, o operador de valor principal ignora contribuições puramente concentradas na origem; por exemplo, $\mathrm{PV}(\delta) = 0$, porque a retirada da bola B_ε elimina exatamente o que está suportado em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

O caso que resolvemos na seção 2.1 é o guia intuitivo: fora da origem, $\nabla^2(1/r) = 0$; logo, toda a contribuição é singular e a parte regular é nula,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{PV}\,0 - 4\pi\,\delta(\mathbf{r}) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}), \tag{12}$$

em perfeito acordo com o cálculo por integração por partes,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\, d^3r = -4\pi\,\phi(\mathbf{0}). \tag{13}$$

3. Aplicação à Identidade de Frahm

Vamos agora aplicar o método descrito anteriormente à derivada segunda $\partial_i\partial_j(1/r)$. Para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, essa expressão é bem definida e dada por:

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}, \tag{14}$$

obtida por diferenciação direta de $1/r$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker, que vale 1 se $i = j$ e zero se $i \neq j$. No entanto, essa fórmula diverge na origem e não pode ser interpretada como função clássica sobre todo o espaço.

A extensão distribucional correta é conhecida como identidade de Frahm [19, 20]:

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} - \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}). \tag{15}$$

Nosso objetivo é justificar o termo $-\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta(\mathbf{r})$ aplicando o mesmo procedimento usado anteriormente. Note que na Eq. 15 o primeiro termo do lado direito da equação deveria carregar um PV, à semelhança da Eq. 12 [16]. Escolhemos suprimí-lo para manter a consistência com a notação da Ref. [19], que é o principal guia deste trabalho.

Consideremos a integral da distribuição contra uma função suave ϕ na bola B_ε:

$$\int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\, d^3r. \tag{16}$$

Antes de integrar, escrevemos explicitamente a regra do produto com $A(\mathbf{r}) = \partial_j\left(\frac{1}{r}\right)$:

$$\phi\,\partial_i A = \partial_i(\phi A) - (\partial_i\phi)\,A. \tag{17}$$

O passo chave é reescrever a derivada direcional como uma divergência:

$$\partial_i g = \nabla\cdot\big(\hat{\mathbf{e}}_i\, g\big), \tag{18}$$

pois $\hat{\mathbf{e}}_i$ é constante e $\nabla\cdot(\hat{\mathbf{e}}_i\, g) = \hat{\mathbf{e}}_i\cdot\nabla g = \partial_i g$. Aplicando (18) ao primeiro termo de (17), obtemos a forma conveniente para usar o Teorema da Divergência:

$$\phi\,\partial_i A = \nabla\cdot\big(\hat{\mathbf{e}}_i\,\phi A\big) - (\partial_i\phi)\,A. \tag{19}$$

Integrando (19) em B_ε com $A(\mathbf{r}) = \partial_j\left(\frac{1}{r}\right)$ e usando o Teorema da Divergência, segue

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon} \phi\,\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\, d^3r \\ = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\, n_i\, dS - \int_{B_\varepsilon} (\partial_i\phi)\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\, d^3r.\end{aligned} \tag{20}$$

No termo de volume do membro direito de (20) usamos $\partial_j(1/r) = -x_j/r^3 = -n_j/r^2$ (onde $n_j = x_j/r$ é a componente j do vetor normal à fronteira do domínio de integração) e aproximamos $\partial_i\phi(\mathbf{r}) \approx (\partial_i\phi)(\mathbf{0})$, pois ϕ é suave. Assim, o integrando é de ordem $1/r^2$. Em coordenadas esféricas, $d^3r = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, de modo que a integral radial é proporcional a $\int_0^\varepsilon dr$. Além disso, a parte angular $\int_{S^2} n_j\, d\Omega$ se anula por simetria. Explicitamente,

$$\int_{B_\varepsilon} \partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\,\partial_i\phi(\mathbf{r})\, d^3r \approx -(\partial_i\phi)(\mathbf{0})\int_0^\varepsilon dr\int_{S^2} n_j\, d\Omega = 0. \tag{21}$$

Portanto,

$$\int_{B_\varepsilon} \partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\,\partial_i\phi(\mathbf{r})\, d^3r \;\to\; 0, \quad \text{quando } \varepsilon\to 0. \tag{22}$$

Resta apenas o termo de contorno da Eq. (20):

$$\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \partial_j\left(\frac{1}{r}\right)\,\phi(\mathbf{r})\, n_i\, dS. \tag{23}$$

Na superfície $|\mathbf{r}| = \varepsilon$, temos $\mathbf{r} = \varepsilon\, \hat{\mathbf{n}}$ (logo $r = \varepsilon$), e

$$\partial_j \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_j}{r^3} = -\frac{x_j}{\varepsilon^3}, \quad n_i = \frac{x_i}{r} = \frac{x_i}{\varepsilon}, \quad dS = \varepsilon^2\, d\Omega. \tag{24}$$

Substituindo na integral de contorno, obtemos

$$\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \partial_j \left(\frac{1}{r}\right) \phi(\mathbf{r})\, n_i\, dS = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \left(-\frac{n_j}{r^2}\right) \phi(\mathbf{r})\, n_i\, dS = -\int_{S^2} \phi(\varepsilon\hat{\mathbf{n}})\, n_i n_j\, d\Omega, \tag{25}$$

onde usamos $r = \varepsilon$, $n_i = x_i/r$ e $dS = \varepsilon^2\, d\Omega$. Como $\phi(\mathbf{r}) \approx \phi(\mathbf{0})$ na superfície quando $\varepsilon \to 0$, podemos fatorá-la:

$$-\phi(\mathbf{0}) \int_{S^2} n_i n_j\, d\Omega. \tag{26}$$

Pela identidade angular padrão [23],

$$\int_{S^2} n_i n_j\, d\Omega = \frac{4\pi}{3}\, \delta_{ij}, \tag{27}$$

e portanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\, \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r}\right) d^3 r = -\frac{4\pi}{3}\, \delta_{ij}\, \phi(\mathbf{0}). \tag{28}$$

Concluímos que $\partial_i \partial_j (1/r)$, interpretada como distribuição, possui uma contribuição singular concentrada na origem, proporcional a $\delta_{ij}\, \delta(\mathbf{r})$, com coeficiente $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Esse procedimento, aplicado diretamente à identidade de Frahm, fornece o termo delta corretamente, confirmando que o método baseado em integração por partes em bolas infinitesimais é eficaz para determinar a parte singular de distribuições derivadas de $1/r$.

4. Equação de Navier-Cauchy e sua Função de Green

Tomamos agora um exemplo um pouco mais elaborado. Entre os muitos problemas em que surgem singularidades pontuais, a *elasticidade linear* oferece um cenário tão importante quanto a eletrostática e igualmente útil para a ilustração didática do problema que abordamos neste texto, apesar de ser menos comum em cursos introdutórios. No regime estático e de pequenas deformações, o campo de deslocamentos $u_i(\mathbf{r})$ em um sólido isotrópico e homogêneo obedece à chamada *equação de Navier*, também conhecida em alguns textos como *equação de Navier-Cauchy* quando considerada no regime estático [24, 25]:

$$\mu\, \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\, \partial^k \partial_i u_k = -\, f_i(\mathbf{r}). \tag{29}$$

Nesta expressão, cada termo possui um papel físico bem definido: os parâmetros λ e μ são os *módulos de Lamé*, constantes características do material que aparecem na lei de Hooke isotrópica,

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon^k{}_k + 2\mu\, \varepsilon_{ij}, \qquad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

O parâmetro μ mede a rigidez ao cisalhamento, isto é, a resistência do sólido a deformações angulares, enquanto λ, em conjunto com μ, controla a resposta volumétrica. A razão entre estreitamento lateral e alongamento no comprimento durante um teste de tração é o *coeficiente de Poisson*, $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$, cujo valor típico está no intervalo $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$. Finalmente, $f_i(\mathbf{r})$ representa a *densidade de força externa por unidade de volume*, como, por exemplo, a força gravitacional atuando sobre o material. Uma exposição acessível e detalhada desses conceitos pode ser encontrada em Lautrup [25].

Cabe ressaltar que adotamos a *notação de Einstein* na Eq.(29), na qual a repetição de um índice – uma vez em cima e outra embaixo – indica soma sobre $1, 2, 3$. No espaço euclidiano, δ_{ij} e δ^{ij} apenas abaixam/levantam índices (por exemplo, $v^i = \delta^{ij} v_j$ e $v_i = \delta_{ij} v^j$). Para derivadas espaciais, escrevemos $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ e $\partial^i \equiv \delta^{ik} \partial_k$; em particular, $\nabla^2 = \partial_k \partial^k$. Usar índices superiores/inferiores deixa as contrações mais transparentes e é uma boa oportunidade para o leitor se familiarizar com uma linguagem recorrente em outras áreas da física, como, notoriamente, na relatividade.

Com essa convenção estabelecida, passemos ao objeto central desta seção: a **função de Green** da equação de Navier-Cauchy, também chamada de *solução de Kelvin* [18].

Assim como em outras teorias de campos lineares, definimos $G_{ij}(\mathbf{r})$ como o deslocamento na origem e que se dá na direção i em resposta a uma força pontual aplicada na posição $\mathbf{r}$ e na direção j. Dessa forma, a função de Green da Eq.(29) obedece

$$\mu\, \nabla^2 G_{ij} + (\lambda + \mu)\, \partial^k \partial_i G_{kj} = -\, \delta_{ij}\, \delta(\mathbf{r}). \tag{30}$$

No espaço livre tridimensional, a solução clássica, obtida elegantemente via transformadas de Fourier [26, 27], é

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi\, \mu\, (1-\nu)} \left[(3 - 4\nu)\, \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right]. \tag{31}$$

A estrutura da Eq.(31) é, ao mesmo tempo, familiar e desafiadora: o termo isotrópico $1/r$ e o termo quadrupolar $x_i x_j / r^3$ são singulares em $r = 0$. Portanto, os operadores diferenciais em (30) devem ser entendidos no sentido distribucional, exatamente como fizemos antes com $\nabla^2(1/r)$ e com a identidade de Frahm.

Vamos aplicar o procedimento operacional introduzido anteriormente, ou seja, multiplicar por uma função teste, integrar em B_ε, integrar por partes e tomar $\varepsilon \to 0$, em outros operadores diferenciais além do Laplaciano puro e da hessiana, ilustrando então que a aplicabilidade do método vai muito além da eletrostática.

Em termos físicos, (30) descreve o deslocamento $\mathbf{u}$ de um sólido elástico homogêneo e isotrópico sob uma força volumétrica. A função de Green G_{ij} é a resposta ao forçamento pontual $f_i(\mathbf{r}) = \delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r})$: ela codifica como uma "força unitária" aplicada na origem ao longo da direção fixa j se propaga pelo meio. Para verificar que a expressão de Kelvin (31) é de fato a função de Green, precisamos analisar a ação dos operadores de (30) sobre os dois blocos singulares que compõem G_{ij}: $1/r$ e $x_i x_j/r^3$. Isso nos leva a quatro objetos centrais:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right), \quad \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right), \quad \partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right), \quad \nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right).$$

Os dois primeiros já são bem conhecidos: Laplaciano de $1/r$, desenvolvido na seção 2.1 e a identidade de Frahm, desenvolvida na seção 3. Os dois últimos têm a mesma "assinatura" de singularidade $1/r^3$ e, como veremos, podem ser escritos de modo compacto em termos da parte regular da hessiana de $1/r$.

Para tornar a conexão explícita, adotaremos a notação

$$Q_{ij} \;\equiv\; \mathrm{PV}\,\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right), \tag{32}$$

isto é, Q_{ij} denota a *parte regular (PV)* da hessiana de $1/r$.

Com essa notação, o que queremos demonstrar é que as *partes regulares (PV)* dos operadores que restam avaliar são dadas por

$$\mathrm{PV}\,\partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right) = -\,Q_{ij}, \quad \mathrm{PV}\,\nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right) = -\,2\,Q_{ij}, \tag{33}$$

enquanto as formas distribucionais completas (isto é, incluindo os termos singulares concentrados na origem) são

$$\begin{aligned} \partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right) &= -\,Q_{ij} + \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}), \\ \nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right) &= -\,2\,Q_{ij} - \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{34}$$

Por completeza, as identidades já estabelecidas para $1/r$ são dadas, nessa notação, por:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\,4\pi\,\delta(\mathbf{r}), \quad \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = Q_{ij} - \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}). \tag{35}$$

Vemos que, na *parte regular*, os novos operadores são proporcionais a Q_{ij}, e que a *parte singular* carrega exatamente a mesma estrutura, proporcional a $\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r})$, da identidade de Frahm – mudando apenas o sinal no caso de $\partial_i\partial^k(x_k x_j/r^3)$ em relação a $\partial_i\partial_j(1/r)$. Essa correspondência será o fio condutor na verificação de (30).

Para manter o foco no que é conceitualmente relevante, deixaremos no *Apêndice A* os cálculos algébricos da *parte regular (PV)* dos operadores, compostos por derivadas elementares para $r \neq 0$, interpretadas como PV ao final do cálculo. No que segue, manteremos integrais e passagens distribucionais completas que isolam os termos singulares. A verificação distribucional completa da equação de Navier-Cauchy Eq. (29) a partir da expressão de Kelvin Eq. (31), advinda do cancelamento das partes PV e soma dos termos singulares será mostrada explicitamente no *Apêndice B*.

No que segue, em vários passagens empregaremos a identidade

$$\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right) = -\partial_j\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (r \neq 0), \tag{36}$$

que simplifica as integrais por partes e algumas derivadas. Sua demonstração também é mostrada no *Apêndice A*.

4.1. Operador $\partial_i\partial^k(x_k x_j/r^3)$: parte singular

Como feito anteriormente, para isolar a parte singular, testaremos o operador contra uma função de teste suave $\phi(\mathbf{r})$. Iniciamos pela regra do produto, definindo

$$A(\mathbf{r}) \;\equiv\; \partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right). \tag{37}$$

Então,

$$\phi(\mathbf{r})\,\partial_i A = \partial_i(\phi\,A) - (\partial_i\phi)\,A. \tag{38}$$

Usaremos o fato de que, para qualquer escalar g, vale $\partial_i g = \nabla\cdot(\hat{\mathbf{e}}_i\,g)$. Aplicando ao primeiro termo de (38), obtemos a decomposição por partes

$$\begin{aligned} \phi\,\partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right) &= \nabla\cdot\left(\hat{\mathbf{e}}_i\,\phi\,\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)\right) \\ &\quad - (\partial_i\phi)\,\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Integrando em B_ε e aplicando diretamente o Teorema da Divergência ao primeiro termo,

$$\begin{aligned} &\int_{B_\varepsilon}\phi\,\partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)\,d^3r \\ &\quad = \underbrace{\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon}\phi\,\partial^k\left(\tfrac{x_k x_j}{r^3}\right)\,n_i\,dS}_{\text{(I)}} - \underbrace{\int_{B_\varepsilon}(\partial_i\phi)\,\partial^k\left(\tfrac{x_k x_j}{r^3}\right)\,d^3r}_{\text{(II)}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Comecemos pela integral de volume. Isolando a parte (II) de (40),

$$\text{(II)} = \int_{B_\varepsilon}(\partial_i\phi)\,\partial^k\left(\tfrac{x_k x_j}{r^3}\right)\,d^3r. \tag{41}$$

Pela suavidade de ϕ, aproximamos $(\partial_i\phi)(\mathbf{r}) \approx (\partial_i\phi)(\mathbf{0})$, de modo que

$$\text{(II)} \;\approx\; (\partial_i\phi)(\mathbf{0})\int_{B_\varepsilon}\partial^k\left(\tfrac{x_k x_j}{r^3}\right)\,d^3r. \tag{42}$$

Usando (36) (demonstrada no Apêndice A),

$$\text{(II)} \;\approx\; -(\partial_i\phi)(\mathbf{0})\int_{B_\varepsilon}\partial_j\left(\tfrac{1}{r}\right)\,d^3r. \tag{43}$$

Usando explicitamente que, para qualquer escalar g, $\partial_j g = \nabla\cdot\big(\hat{\mathbf{e}}_j\, g\big)$ (com $\hat{\mathbf{e}}_j$ constante), aplicamos o Teorema da Divergência componente a componente ao campo $\hat{\mathbf{e}}_j\,(1/r)$:

$$\int_{B_\varepsilon} \partial_j\big(\tfrac{1}{r}\big)\; d^3r = \int_{B_\varepsilon} \nabla\cdot\Big(\hat{\mathbf{e}}_j\,\tfrac{1}{r}\Big)\, d^3r = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \frac{1}{r}\,(\hat{\mathbf{e}}_j\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dS$$
$$= \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \frac{1}{r}\, n_j\, dS = \frac{1}{\varepsilon}\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} n_j\, dS = \varepsilon\int_{S^2} n_j\, d\Omega\,. \tag{44}$$

Logo, o termo (II) é da ordem de ϵ e portanto tende a zero quando $\epsilon \to 0$.

Além disso, por paridade, a integral em (44) é exatamente nula para todo $\varepsilon > 0$.

Resta avaliar a parte (I) de (40):

$$(\mathrm{I}) = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\partial^k\big(\tfrac{x_k x_j}{r^3}\big)\; n_i\, dS. \tag{45}$$

Usando novamente (36),

$$(\mathrm{I}) = -\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\partial_j\big(\tfrac{1}{r}\big)\, n_i\, dS. \tag{46}$$

Na esfera $r = \varepsilon$ temos $\partial_j(1/r) = -x_j/r^3 = -\,n_j/r^2$ e $dS = \varepsilon^2\, d\Omega$, logo

$$(\mathrm{I}) = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\frac{n_j}{\varepsilon^2}\, n_i\, dS = \int_{S^2} \phi(\varepsilon\hat{\mathbf{n}})\, n_i n_j\, d\Omega. \tag{47}$$

Tomando o limite $\varepsilon \to 0$ pela continuidade de ϕ,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,(\mathrm{I}) = \phi(\mathbf{0})\int_{S^2} n_i n_j\, d\Omega = \phi(\mathbf{0})\,\frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}. \tag{48}$$

Reunindo (40), (44) e (48), obtemos a contribuição singular de $\partial_i\partial^k(x_k x_j/r^3)$:

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\partial_i\partial^k\Big(\frac{x_k x_j}{r^3}\Big)\; d^3r = \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\phi(\mathbf{0})} \tag{49}$$

Com a parte regular (PV) demonstrada no Apêndice A, a contribuição singular (49) recompõe a forma distribucional completa indicada em (34) para $\partial_i\partial^k(x_k x_j/r^3)$.

No que segue, avaliamos o Laplaciano do termo tensorial, $\nabla^2(x_i x_j/r^3)$.

4.2. Operador $\nabla^2\big(x_i x_j/r^3\big)$: parte singular

Para determinar sua parte singular, multiplicamos o operador por uma função teste suave $\phi(\mathbf{r})$ e integramos em uma bola B_ε de raio ε centrada na origem:

$$\int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\nabla^2\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\; d^3r. \tag{50}$$

Aplicando a identidade vetorial

$$f\,\nabla^2 g = \nabla\cdot\big(f\,\nabla g\big) - \nabla f\cdot\nabla g, \tag{51}$$

com $f = \phi(\mathbf{r})$ e $g = x_i x_j/r^3$, obtemos

$$\phi(\mathbf{r})\nabla^2\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)$$
$$= \nabla\cdot\Big[\phi(\mathbf{r})\,\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\Big] - \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\,. \tag{52}$$

Integrando (52) em B_ε,

$$\int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\,\nabla^2\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\; d^3r = \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \nabla\cdot\Big[\phi(\mathbf{r})\,\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\Big]\, d^3r}_{(\mathrm{I})}$$
$$-\underbrace{\int_{B_\varepsilon} \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\, d^3r}_{(\mathrm{II})}\,. \tag{53}$$

Vamos calcular primeiro a parte (II).

$$(\mathrm{II}) = \int_{B_\varepsilon} \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\; d^3r. \tag{54}$$

Pela suavidade de ϕ, aproximamos

$$\nabla\phi(\mathbf{r}) \;\approx\; \nabla\phi(\mathbf{0}), \tag{55}$$

e portanto

$$(\mathrm{II}) \;\approx\; \nabla\phi(\mathbf{0})\cdot\int_{B_\varepsilon} \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\; d^3r. \tag{56}$$

Para avaliar a integral do gradiente no lado direito, reescrevemos o gradiente como divergência componente a componente. Em notação de Einstein, o gradiente de um escalar f é $\nabla f = \hat{\mathbf{e}}^k\,\partial_k f$, e observamos que $\partial_k f = \nabla\cdot\big(f\,\hat{\mathbf{e}}_k\big)$. Logo, $\nabla f = \hat{\mathbf{e}}^k\,\nabla\cdot\big(f\,\hat{\mathbf{e}}_k\big)$. Integrando em B_ε e usando o Teorema da Divergência,

$$\int_{B_\varepsilon} \nabla f\, d^3r = \hat{\mathbf{e}}^k\int_{B_\varepsilon} \nabla\cdot\big(f\,\hat{\mathbf{e}}_k\big)\, d^3r = \hat{\mathbf{e}}^k\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} f\, n_k\, dS$$
$$= \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} f\,\hat{\mathbf{n}}\, dS, \tag{57}$$

onde $\hat{\mathbf{n}} = n_k\hat{\mathbf{e}}^k = \mathbf{r}/r$.

Isto posto, tomando agora $f(\mathbf{r}) = x_i x_j/r^3$,

$$\int_{B_\varepsilon} \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\; d^3r = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \frac{x_i x_j}{r^3}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\, dS = \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \frac{x_i x_j\,\mathbf{r}}{r^4}\, dS. \tag{58}$$

Na esfera $r = \varepsilon$, cada coordenada $x_\ell = O(\varepsilon)$ e $dS = O(\varepsilon^2)$, logo

$$\frac{x_i x_j\,\mathbf{r}}{r^4}\, dS \;\sim\; \frac{\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon}{\varepsilon^4}\,\varepsilon^2 = O(\varepsilon). \tag{59}$$

Assim,

$$\int_{B_\varepsilon} \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\; d^3r = \varepsilon\int_{S^2} (\cdots)\, d\Omega \;\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\; \mathbf{0}. \tag{60}$$

Note também que, independente do limite, a integral de superfície em (58) se anula por simetria, pois o integrando $x_i x_j\,\mathbf{r}$ é ímpar sob $\mathbf{r}\mapsto -\mathbf{r}$.

Resta, portanto, apenas a contribuição (I) de (53). Pelo Teorema da Divergência,

$$(\mathrm{I}) = \int_{B_\varepsilon} \nabla \cdot \left[\phi(\mathbf{r})\, \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\right] d^3r$$
$$= \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\, \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big) \cdot d\mathbf{S}. \tag{61}$$

Expandindo o gradiente,

$$\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big) = \frac{x_j}{r^3}\,\hat{\mathbf{e}}_i + \frac{x_i}{r^3}\,\hat{\mathbf{e}}_j - 3\,\frac{x_i x_j}{r^5}\,\mathbf{r}, \tag{62}$$

e projetando na normal $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$,

$$\nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{x_j}{r^3}\, n_i + \frac{x_i}{r^3}\, n_j - 3\,\frac{x_i x_j}{r^5}\, r = -\,\frac{n_i n_j}{r^2}, \tag{63}$$

com $n_i = x_i/r$.

Na esfera $r = \varepsilon$ (onde $dS = \varepsilon^2\, d\Omega$), segue de (61) e (63) que

$$\oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\, \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big) \cdot d\mathbf{S} = -\int_{S^2} \phi(\varepsilon\hat{\mathbf{n}})\, n_i n_j\, d\Omega. \tag{64}$$

No limite $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{|\mathbf{r}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\, \nabla\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big) \cdot d\mathbf{S}$$
$$= -\,\phi(\mathbf{0}) \int_{S^2} n_i n_j\, d\Omega = -\,\phi(\mathbf{0})\, \frac{4\pi}{3}\, \delta_{ij}. \tag{65}$$

Portanto, de (53) com (60) e (65), obtemos

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon} \phi(\mathbf{r})\, \nabla^2\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big)\, d^3r = -\,\frac{4\pi}{3}\, \delta_{ij}\, \phi(\mathbf{0})} \tag{66}$$

que identifica a *parte singular* da distribuição $\nabla^2\big(x_i x_j/r^3\big)$.

Com a *parte regular (PV)* demonstrada no *Apêndice A*, a contribuição singular (66) recompõe a forma distribucional completa indicada em (34) para $\nabla^2(x_i x_j/r^3)$.

Com isso, determinamos explicitamente a parte singular dos operadores $\partial_i\partial^k(x_k x_j/r^3)$ e $\nabla^2(x_i x_j/r^3)$. Em conjunto com as partes regulares (PV) calculadas no Apêndice A, dispõe-se, em princípio, de tudo o que é necessário para verificar que a expressão de Kelvin (31) satisfaz a equação de Navier-Cauchy (30). Essa verificação algébrica está reunida no Apêndice B: ali mostra-se que as contribuições de valor principal se cancelam e que os termos concentrados na origem recompõem exatamente $-\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r})$. Reforçamos, portanto, o escopo do texto principal: isolar, de forma transparente no sentido das distribuições, as singularidades dos operadores.

5. Conclusão

Neste trabalho desenvolvemos uma formulação operacional para tratar derivadas de funções singulares, com foco no caso prototípico de $1/r$. Através de integrações por partes em vizinhanças da origem, mostramos como isolar de forma sistemática a contribuição concentrada em $r = 0$, obtendo de maneira transparente os termos proporcionais à distribuição delta de Dirac que complementam a parte regular (valor principal). Essa abordagem permitiu justificar de forma rigorosa identidades clássicas, como o laplaciano de $1/\mathrm{r}$ e a identidade de Frahm, bem como estendê-las a operadores diferenciais que aparecem na função de Green da equação de Navier–Cauchy.

O resultado principal é a evidência de uma estrutura unificada: operadores singulares relevantes em eletrostática, elasticidade e em outros contextos da física matemática compartilham o mesmo padrão "PV + termo singular proporcional a $\delta(r)$". Essa moldura regularizante não apenas esclarece a consistência interna dessas identidades, como também oferece um procedimento didático direto para derivá-las.

Além de reforçar o papel fundamental da teoria de distribuições em problemas com fontes localizadas, o método aqui apresentado pode ser explorado em extensões naturais: derivadas de ordens superiores, problemas em outras dimensões espaciais, ou aplicações em campos mais recentes como fluidos quânticos e materiais metamórficos. Assim, a análise contribui tanto para a compreensão conceitual quanto para o uso prático de operadores singulares em física matemática.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil, Processo nº 2013/07276-1, Centro de Pesquisa em Óptica e Fotônica, e Projeto de Auxílio Regular Processo nº 2025/14487-6. Pedro Diniz agradece apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

Material Suplementar

Neste apêndice calculamos, para $r \neq 0$, as derivadas necessárias e, ao final, interpretamos os resultados no sentido de valor principal (PV). O objetivo é obter, de forma direta, as identidades

$$\mathrm{PV}\,\partial_i\partial^k\Big(\frac{x_k x_j}{r^3}\Big) = -\,Q_{ij}, \qquad \mathrm{PV}\,\nabla^2\Big(\frac{x_i x_j}{r^3}\Big) = -\,2\,Q_{ij},$$

onde $Q_{ij} \equiv \mathrm{PV}\,\partial_i\partial_j(1/r)$ foi definido em (32).

Primeira derivada mista

Comecemos expandindo a primeira derivada $\partial^k(x_k x_j/r^3)$, aplicando a regra do produto:

$$\partial^k\Big(\frac{x_k x_j}{r^3}\Big) = x_k x_j\, \partial^k\Big(\frac{1}{r^3}\Big) + \frac{1}{r^3}\, \partial^k(x_k x_j). \tag{67}$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2025-0430

Calculando explicitamente os dois termos e usando $\partial^k x_k = 3$,

$$x_k x_j\left(-\frac{3x^k}{r^5}\right)+\frac{1}{r^3}\big(3x_j + x_k\delta_j^k\big)\,. \tag{68}$$

Efetuando as contrações $x_k x^k = r^2$ e $x_k\delta_j^k = x_j$, obtemos

$$\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)=\frac{-3x_j+4x_j}{r^3}=\frac{x_j}{r^3}. \tag{69}$$

Este resultado pode ser escrito de forma mais sugestiva como

$$\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)=-\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right),\qquad (r\neq 0). \tag{70}$$

Aplicando ∂_i (comutam fora da origem) e usando Q_{ij} de (32),

$$\mathrm{PV}\,\partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)=-\,\mathrm{PV}\,\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)=-\,Q_{ij}. \tag{71}$$

Laplaciano do termo tensorial

Consideremos agora o Laplaciano do termo $x_i x_j/r^3$:

$$\nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right)=\partial_k\partial^k\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right). \tag{72}$$

Aplicando a regra do produto à primeira derivada,

$$\partial^k\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right)=x_i x_j\,\partial^k\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r^3}\,\partial^k(x_i x_j)\,, \tag{73}$$

isto é,

$$x_i x_j\left(-\frac{3x^k}{r^5}\right)+\frac{1}{r^3}\big(\delta_i^k x_j + x_i\delta_j^k\big)\,. \tag{74}$$

Aplicando ∂_k à expressão acima, separam-se dois blocos.

Primeiro bloco:

$$\begin{aligned}\partial_k&\left[-3\,x_i x_j x^k\,\frac{1}{r^5}\right]\\ &=-3\left[(\partial_k x_i)x_j x^k\frac{1}{r^5}+x_i(\partial_k x_j)x^k\frac{1}{r^5}\right.\\ &\quad\left.+x_i x_j(\partial_k x^k)\frac{1}{r^5}+x_i x_j x^k\partial_k\left(\frac{1}{r^5}\right)\right].\end{aligned} \tag{75}$$

Com $\partial_k x_i = \delta_{ik}$, $\partial_k x^k = 3$ e $\partial_k(r^{-5}) = -5\,x_k/r^7$, a soma entre colchetes é dada por

$$x_j x_i\frac{1}{r^5}+x_i x_j\frac{1}{r^5}+3x_i x_j\frac{1}{r^5}-5x_i x_j\frac{1}{r^5}=0,$$

logo

$$\partial_k\left[-3\,x_i x_j x^k\,\frac{1}{r^5}\right]=0. \tag{76}$$

Segundo bloco:

A contração com os deltas seleciona diretamente as derivadas nas direções i e j:

$$\begin{aligned}\partial_k\left[\frac{1}{r^3}\big(\delta_i^k x_j + x_i\delta_j^k\big)\right]&=\partial_k\big(\delta_i^k x_j r^{-3}\big)+\partial_k\big(x_i\delta_j^k r^{-3}\big)\\ &=\partial_i(x_j r^{-3})+\partial_j(x_i r^{-3}).\end{aligned} \tag{77}$$

Derivando cada termo,

$$\begin{aligned}\partial_i(x_j r^{-3})&=\delta_{ij}r^{-3}-3\,\frac{x_i x_j}{r^5},\\ \partial_j(x_i r^{-3})&=\delta_{ij}r^{-3}-3\,\frac{x_i x_j}{r^5}.\end{aligned} \tag{78}$$

Somando,

$$\partial_k\partial^k\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right)=2\,\delta_{ij}\,\frac{1}{r^3}-6\,\frac{x_i x_j}{r^5}. \tag{79}$$

Por outro lado, para $r\neq 0$,

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}. \tag{80}$$

Comparando (79) com (80), segue a forma compacta da parte regular:

$$\mathrm{PV}\,\nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right)=-\,2\,\mathrm{PV}\,\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right)=-\,2\,Q_{ij}. \tag{81}$$

Em resumo, obtivemos as partes regulares desejadas:

$$\mathrm{PV}\,\partial_i\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)=-\,Q_{ij},\qquad \mathrm{PV}\,\nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right)=-\,2\,Q_{ij},$$

que são usadas no corpo do texto para isolar as contribuições singulares dos operadores correspondentes.

Verificação distribucional da equação de Navier–Cauchy

Agora que obtivemos, isoladamente, as formas regulares (PV) e os termos singulares dos operadores $\nabla^2(1/r)$, $\partial_i\partial_j(1/r)$, $\partial_i\partial^k(x_k x_j/r^3)$ e $\nabla^2(x_i x_j/r^3)$, vamos aplicá-los diretamente à função de Green de Kelvin e verificar, com cuidado distribucional, que a equação de Navier–Cauchy é satisfeita para uma fonte pontual. O roteiro é simples: (i) calculamos a contribuição regular (PV) de $\nabla^2 G_{ij}$ e de $\partial^k\partial_i G_{kj}$ e mostramos que ela zera na combinação do operador; (ii) calculamos as partes singulares e mostramos que o que resta é exatamente $-\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r})$.

Recordemos a equação para G_{ij}:

$$\mu\,\nabla^2 G_{ij}(\mathbf{r})+(\lambda+\mu)\,\partial^k\partial_i G_{kj}(\mathbf{r})=-\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}), \tag{82}$$

e a expressão de Kelvin em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}G_{ij}(\mathbf{r})&=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\frac{\delta_{ij}}{r}+\frac{x_i x_j}{r^3}\right],\\ \nu&=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.\end{aligned} \tag{83}$$

Usaremos a notação $Q_{ij}\equiv \mathrm{PV}\,\partial_i\partial_j(1/r)$.

Parte regular (PV): $\nabla^2 G_{ij}$

Para $r \neq 0$, escrevemos

$$G_{ij}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3}\right]. \quad (84)$$

Usando $\nabla^2(1/r) = 0$ para $r \neq 0$ e a identidade já estabelecida

$$\mathrm{PV}\,\nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right) = -\,2\,Q_{ij}, \quad (85)$$

obtemos

$$\nabla^2 G_{ij}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{r}) = -\,\frac{1}{8\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,Q_{ij}. \quad (86)$$

Parte regular (PV): $\partial^k \partial_i G_{kj}$

Com

$$G_{kj}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\frac{\delta_{kj}}{r} + \frac{x_k x_j}{r^3}\right] \quad (r \neq 0), \quad (87)$$

temos primeiro

$$\partial^k G_{kj}^{\mathrm{reg}} = \frac{1}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) + \partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right)\right]. \quad (88)$$

Usando a identidade (válida para $r \neq 0$)

$$\partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right) = -\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right), \quad (89)$$

segue que

$$\partial^k G_{kj}^{\mathrm{reg}} = \frac{2(1-2\nu)}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right). \quad (90)$$

Derivando em i (e lembrando que as derivadas comutam fora da origem),

$$\partial^k \partial_i G_{kj}^{\mathrm{reg}} = \frac{2(1-2\nu)}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1-2\nu}{8\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,Q_{ij}. \quad (91)$$

Substituição na Navier–Cauchy (parte regular)

Reunindo os resultados PV:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G_{ij}^{\mathrm{reg}} &= -\,\frac{1}{8\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,Q_{ij}, \\ \partial^k \partial_i G_{kj}^{\mathrm{reg}} &= \frac{1-2\nu}{8\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,Q_{ij}. \end{aligned} \quad (92)$$

Aplicando o operador de Navier–Cauchy à parte regular,

$$\begin{aligned} &\mu\,\nabla^2 G_{ij}^{\mathrm{reg}} + (\lambda+\mu)\,\partial^k\partial_i G_{kj}^{\mathrm{reg}} \\ &\quad = \left[-\,\frac{1}{8\pi(1-\nu)} + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\,\mu\,(1-\nu)}(1-2\nu)\right]Q_{ij}. \end{aligned} \quad (93)$$

Usando $1-2\nu = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$, obtemos $\frac{\lambda+\mu}{\mu}(1-2\nu) = 1$, e portanto

$$\begin{aligned} &\mu\,\nabla^2 G_{ij}^{\mathrm{reg}} + (\lambda+\mu)\,\partial^k\partial_i G_{kj}^{\mathrm{reg}} \\ &\quad = \left(-\,\tfrac{1}{8\pi(1-\nu)} + \tfrac{1}{8\pi(1-\nu)}\right)Q_{ij} = 0, \qquad (r \neq 0). \end{aligned} \quad (94)$$

Como esperado para uma função de Green, toda a contribuição de valor principal se cancela.

Partes singulares

Agora mantemos apenas os termos concentrados na origem. As identidades distribucionais necessárias são

$$\begin{aligned} \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) &= -4\pi\,\delta(\mathbf{r}), \\ \nabla^2\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right) &= -\,2\,Q_{ij} - \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (95)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) &= Q_{ij} - \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}), \\ \partial^k\left(\frac{x_k x_j}{r^3}\right) &= -\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (96)$$

(i) Singular de $\nabla^2 G_{ij}$

Da forma fechada (83),

$$\begin{aligned} &\left(\nabla^2 G_{ij}\right)_{\mathrm{sing}} \\ &\quad = \frac{1}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\delta_{ij}\,(-4\pi\,\delta) - \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta\right] \\ &\quad = \frac{12\nu-10}{12\,\mu\,(1-\nu)}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (97)$$

(ii) Singular de $\partial^k\partial_i G_{kj}$

Como

$$\partial^k G_{kj} = \frac{2(1-2\nu)}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right), \quad (98)$$

derivando em i e separando o termo δ de $\partial_i\partial_j(1/r)$,

$$\begin{aligned} \left(\partial^k\partial_i G_{kj}\right)_{\mathrm{sing}} &= \frac{2(1-2\nu)}{16\pi\,\mu\,(1-\nu)}\left(-\,\frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\,\delta\right) \\ &= -\,\frac{1-2\nu}{6\,\mu\,(1-\nu)}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (99)$$

Fechamento: soma singular na Navier–Cauchy

Somando apenas as partes singulares no lado esquerdo de (82),

$$\begin{aligned} &\left[\mu\,\nabla^2 G_{ij} + (\lambda+\mu)\,\partial^k\partial_i G_{kj}\right]_{\mathrm{sing}} \\ &\quad = \mu\,\frac{12\nu-10}{12\,\mu\,(1-\nu)}\,\delta_{ij}\,\delta + (\lambda+\mu)\left(-\,\frac{1-2\nu}{6\,\mu\,(1-\nu)}\right)\delta_{ij}\,\delta \\ &\quad = \left(\frac{12\nu-10}{12(1-\nu)} - \frac{\lambda+\mu}{6\,\mu\,(1-\nu)}(1-2\nu)\right)\delta_{ij}\,\delta. \end{aligned} \quad (100)$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2025-0430

Com $\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}(1-2\nu)=1$, obtemos

$$\Big[\mu\,\nabla^2 G_{ij} + (\lambda+\mu)\,\partial^k\partial_i G_{kj}\Big]_{\text{sing}} = \left(\frac{12\nu-10}{12(1-\nu)} - \frac{1}{6(1-\nu)}\right)\delta_{ij}\,\delta = -\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}). \quad (101)$$

Como a parte regular já se anulou para $r \neq 0$, concluímos

$$\mu\,\nabla^2 G_{ij}(\mathbf{r}) + (\lambda+\mu)\,\partial^k\partial_i G_{kj}(\mathbf{r}) = -\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}), \quad (102)$$

isto é, a expressão de Kelvin (83) satisfaz a equação de Navier–Cauchy (82) no sentido das distribuições.

Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

Referências

[1] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2023), 5 ed.
[2] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999), 3 ed.
[3] M. Hohmann, Phys. Rev. D. **95**, 124049 (2017).
[4] D. Krimans e S. Putterman, Physics of Fluids **36**, 037131 (2024).
[5] E. Parker, Eur. J. Phys. **38**, 025205 (2017).
[6] P.T. Leung, Eur. J. Phys. **29**, 137 (2008).
[7] P.T. Leung e G.J. Ni, Eur. J. Phys. **27**, N1 (2006).
[8] D.J. Griffiths, Am. J. Phys. **79**, 867 (2011).
[9] W. Miyahira e D.C. Latimer, Am. J. Phys. **87**, 146 (2019).
[10] L. Chomaz, I. Ferrier-Barbut, F. Ferlaino, B. Laburthe-Tolra, B.L. Lev e T. Pfau, Rep. Prog. Phys. **86**, 026401 (2023).
[11] N. Bigagli, W. Yuan, S. Zhang, B. Bulatovic, T. Karman, I. Stevenson e S. Will, Nature **631**, 293 (2024).
[12] C. Eberlein, S. Giovanazzi e D.H.J. O'Dell, Phys. Rev. A. **71**, 033618 (2005).
[13] U. Fano e A.R.P. Rau, *Atomic Collisions and Spectra* (Academic Press, Orlando, 1986).
[14] A. Gsponer, Eur. J. Phys. **28**, 267 (2007).
[15] R. Estrada e R.P. Kanwal, *A Distribution Approach to Asymptotics. Theory and Applications* (Birkhäuser, Boston, 2002), 2 ed.
[16] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis. An Introduction to Generalized Functions, with Applications* (Dover, New York, 1987).
[17] V. Hnizdo, Eur. J. Phys. **32**, 287 (2011).
[18] A. Favata, J. Elasticity **109**, 189 (2012).
[19] C.P. Frahm, Am. J. Phys. **51**, 826 (1983).
[20] J.R. Sousa, Rev Bras Ensino Fís. **46**, e20240198 (2024).
[21] J. Franklin, Am. J. Phys. **78**, 1225 (2010).
[22] J. Franklin, *Classical Electromagnetism* (Dover, New York, 2017), 2 ed.
[23] G.B. Arfken, H.J. Weber e F.E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 2013), 7 ed.
[24] W.S. Slaughter, *The Linearized Theory of Elasticity* (Birkhauser, Basel, 2003).
[25] B. Lautrup, *Physics of Continuous Matter: Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World* (CRC Press, Boca Raton, 2011).
[26] E. Bouchbinder, *Green's Function of the Infinite Medium in Elasticity*, disponível em: https://www.weizmann.ac.il/chembiophys/bouchbinder/sites/chemphys.bouchbinder/files/uploads/Courses/2021/TAs/TA4-Linear_elasticity-I.pdf, acessado em: 30/09/2025.
[27] R. Walker, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical and Physical Sciences **442**, 337 (1993).